Intégrales de Fresnel | Leçons : 209, 230, 241, 246

Thm: $\int_0^{+\infty} \sin t^2 \, dt = \int_0^{+\infty} \cos t^2 \, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Preuve:

On va montrer que ▶ $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$ et $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi s^2} ds$ convergent

▶ $\forall x \in [0,1[, f(x) = e^{2i\pi x^2}$ est somme de sa série de Fourier et que son coef de Fourier est $\forall n \in \mathbb{N}, c_n(f) = e^{-i\pi \frac{n^2}{2}} \int_{-\frac{n}{2}}^{-\frac{n}{2}+1} e^{2i\pi s^2} ds$

▶ On calcule J puis on montre que les intégrales de Fresnel convergent et on donne leur valeur

▶ En 0: $\left|\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{u}}$ qui est intégrable sur $]0,1]$

en $+\infty$: Soit $A \geq 1$ on a

$$\int_1^A \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du = \frac{e^{iA}}{i\sqrt{A}} - \frac{e^{i}}{i} + \frac{1}{2i}\int_1^A \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} du \quad \text{par IPP}$$

or $\frac{e^{iA}}{i\sqrt{A}} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$ et $\left|\frac{e^{iu}}{u^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{u^{3/2}}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$

Le terme de droite converge donc celui de gauche aussi.

D'où I converge

Pour J on pose $u = 2\pi s^2$, C^1-difféo on a donc $\int_1^{+\infty} e^{2i\pi s^2} ds = \int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{u}} du = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} I$

Donc J converge

▶ Soit $\forall x \in [0,1[, f(x) = e^{2i\pi x^2}$ qui est C^1 sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique donc la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Ses coefs $c_n(f) = \int_0^1 f(x) e^{-2i\pi n x} dx = \int_0^1 e^{2i\pi(x^2 - nx)} dx$

$$= \int_0^1 e^{2i\pi\left(\left(x-\frac{n}{2}\right)^2 - \frac{n^2}{4}\right)} dx$$

$$= e^{-i\pi\frac{n^2}{2}} \int_0^1 e^{2i\pi\left(x-\frac{n}{2}\right)^2} dx$$

$\downarrow s = x - \frac{n}{2}$

$$= e^{-i\pi\frac{n^2}{2}} \int_{-\frac{n}{2}}^{-\frac{n}{2}+1} e^{2i\pi s^2} ds$$

▶ Soit $k \in \mathbb{Z}$ on a $c_{2k}(f) = \int_{-k}^{-k+1} e^{2i\pi s^2} ds$

On a $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{2k}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-k}^{-k+1} e^{2i\pi s^2} ds = J$

donc $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{2i\pi n x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

à $x=0$ et $x = \frac{1}{2}$ on a

$$f(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)(-1)^n$$

Donc $J = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{2k}(f) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_n(f)(1+(-1)^n) = \frac{f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$

Soit $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi s^2} ds = \frac{1+i}{2}$

On a donc $\operatorname{Re} J = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi s^2) ds = \frac{1}{2}$ et $\operatorname{Im} J = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi s^2) ds = \frac{1}{2}$

Donc par parité on a $\int_0^{+\infty} \cos(2\pi s^2) ds = \frac{1}{4}$ et $\int_0^{+\infty} \sin(2\pi s^2) ds = \frac{1}{4}$

en posant $t = \sqrt{2\pi}\, s$ on a donc

$$\int_0^{+\infty} \cos t^2 \, dt = \cancel{\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

et $\int_0^{+\infty} \sin t^2 \, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$\square$

137 Dervs, Lesesvre

COMPLÉMENT

- Si f est C^1 et périodique (2π par ex) alors la série de Fourier de f CV vers f.

f est C^1 donc $f' \in C^0_{2\pi} \in L^2_{2\pi}$ d'où par Parseval on a

$$\sum |c_n(f')|^2 = \sum |n c_n(f)|^2 = \|f'\|_2^2$$

D'où $\sum |c_n(f)| = \sum |n c_n(f)| \cdot \frac{1}{|n|} \leq \left(\sum |n c_n(f)|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum \frac{1}{|n|^2}\right)^{1/2}$ par Cauchy Schwarz

$< +\infty$ d'où le résultat